Mathematische Modelle in der Landwirtschaft

In der Biologie, insbesondere bei Überlegungen die Land- und Forstwirtschaft betreffend, erweisen sich das lineare und das geometrische Wachstumsmodell als nicht ausreichend und es drängt sich eine Verallgemeinerung auf. Der Einsatz eines programmierbaren Taschenrechners bietet zusätzlich die Lösung durch Simulation. Anhand des Schweinezyklusmodells, welches das Auf und Ab bei der Entwicklung des Schweinepreises in den letzten 2 Jahrzehnten beschreibt, können Erfahrungen für die Vorgänge bei dynamischen Prozessen gesammelt werden.
In der Land- und Forstwirtschaft werden zunehmend mathematische Methoden notwendig, die einerseits konkurrenzfähige Produktion ermöglichen andererseits Langzeitentwicklungen beschreiben. War es seit 1945 in erster Linie die notwendige Produktionssteigerung, der alle anderen Überlegungen untergeordnet waren, haben Landwirte heute mit vielen unangenehmen Nebenerscheinungen fertig zu werden. (Beispielsweise brachte die Mechanisierung eine größere Bodenverdichtung, diese machte wieder stärkere Maschinen notwendig und diese verdichteten den Boden noch mehr; oder eine bestimmte Unkrautart wurde durch Pestizide bekämpft, dabei kam es zu alarmierender Zunahme anderer Unkrautarten).
Im ersten Teil gibt der Autor eine ungewohnte Einführung in das Kapitel Folgen und Reihen im Hinblick auf einfache Wachstumsmodelle, insbesondere auf jenes des Schweinezyklus. Schweinezucht und -mast verursachten und verursachen mehr als andere Produktionsverfahren in der Landwirtschaft etliche jener, zum Teil unangenehmen Wechselwirkungen. Interessant ist dabei, daß diskrete Wachstumsmodelle auch auf den kaufmännischen Bereich übertragbar sind.
Im zweiten Teil geht es um jene mathematischen Modelle, die bei gezielter Fütterung gute Gesundheit und Milchleistung der Kuh gewährleisten.
Bei allen verwendeten Modellen möchte ich den Leser jedoch an den Modellcharakter erinnern:

Modelle sind von der Wirklichkeit verschieden Modelle idealisieren, vernachlässigen.

Trotzdem kann man gerade über Modelle entscheidende Erfahrungen, Erkenntnisse und Problemlösungen für die Wirklichkeit finden.

1.1. Lineares Wachstumsmodell

$$\left[\begin{array}{l}\text{Populationsgröße}\\ \text{nach } n \text{ Jahren}\end{array}\right] - \left[\begin{array}{l}\text{Populationsgröße}\\ \text{nach } n-1 \text{ Jahren}\end{array}\right] = b \qquad b \text{ ... konst.}$$

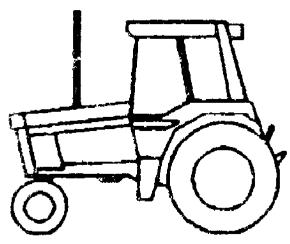
$$x_n - x_{n-1} = b$$

arithmetische Folge $b > 0$ ... Population wird linear größer
$b < 0$ ... Population wird linear kleiner
$b = 0$ ... Population bleibt gleich

Partikuläre Lösung: $x_n = x_o + n \cdot b$

x_o ... Anfangsgröße der Population

Allgemeine Lösung: $x_n = C + n \cdot b$



1.2. Geometrisches Wachstumsmodell

$$\begin{bmatrix}\text{Populationsgröße}\\ \text{nach n Jahren}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\text{Populationsgröße}\\ \text{nach n - 1 Jahren}\end{bmatrix} = p\cdot\begin{bmatrix}\text{Populationsgröße}\\ \text{nach n - 1 Jahren}\end{bmatrix}$$

p bedeutet z. B. für 12 % Wachstum: $p = 0{,}12$

$p > 0$ ... Population wächst exponentiell
$p < 0$ ... Population schrumpft exponentiell
$p = 0$ ... Population bleibt gleich

$$x_n - x_{n-1} = p\cdot x_{n-1}$$
$$x_n = (1+p)\cdot x_{n-1}$$

$1+p = a$ ... Wachstumsfaktor
Vermehrungfaktor

$x_n = a\cdot x_{n-1}$ geometrische Folge

Partikuläre Lösung: $x_n = a^n\cdot x_0$ *Allgemeine Lösung:* $x_n = C\cdot a^n$

Die Modelle 1.1 bzw. 1.2 gelten beim Wachstum von Populationen, wenn überhaupt, nur unter idealen Wachstumsbedingungen und nur über kleine Zeitabschnitte hinweg.

1.3. Verallgemeinertes Wachstumsmodell 1

$$\begin{bmatrix}\text{Populationsgröße}\\ \text{nach n Jahren}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\text{Populationsgröße}\\ \text{nach n - 1 Jahren}\end{bmatrix} =$$

$$= p\cdot\begin{bmatrix}\text{Populationsgröße}\\ \text{nach n - 1 Jahren}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\text{Zu- oder}\\ \text{Abwanderung}\end{bmatrix}$$

$x_n - x_{n-1} = p\cdot x_{n-1} + b$ $\quad 1+p = a$
$x_n = a\cdot x_{n-1}+b$ $\quad a,b = \text{konst.}$

1.4. Verallgemeinertes Wachstumsmodell 2

$$\begin{bmatrix}\text{Populationsgröße}\\ \text{nach n Jahren}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\text{Populationsgröße}\\ \text{nach n - 1 Jahren}\end{bmatrix} =$$

$$= p(n)\cdot\begin{bmatrix}\text{Populationsgröße}\\ \text{nach n - 1 Jahren}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\text{Von n abhängige}\\ \text{Zu - oder Abwanderung}\end{bmatrix}$$

$$x_n - x_{n-1} = p(n)\cdot x_{n-1} + q(n)$$
$$1+p(n) = a_n,\ q(n) = b_n$$
$$x_n = a_n\cdot x_{n-1} + b_n$$

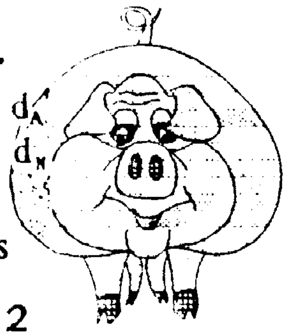
Allgemeinste Form einer Linearen Differenzengleichung 1. Ordnung:

$$u(n)\cdot x_n + v(n)\cdot x_{n-1} = w(n)$$

Der Schweinezyklus

Ein diskretes Wachstumsmodell des landwirtschaftlich-kaufmännischen Bereiches. (Spinnwebtheorem)

Berechnung eines Schweinezyklus in höchstens N Schritten. Gegeben sind die Angebotsfunktion und die Nachfragefunktion. Die Preise der einzelnen Perioden sind zu berechnen.



Das Lineare Modell

Angebotsfunktion ... $y_A = k_A x + d_A$

Nachfragefunktion ... $y_N = k_N x + d_N$

y ... Stück, x ... Preis

Math. Modell .... $p_t = \frac{k_A}{k_N} \cdot p_{t-1} + \frac{d_A - d_N}{k_N}$

Verallgemeinertes Wachstumsmodell 2

Begründung

(Nach Unterlagen von Prof. Weilharter und Dipl.-Ing. Nemec):

Angebot und Nachfrage:
Für einen auf den Markt befindlichen Artikel herrscht atomistische Konkurrenz (die Unternehmung kann den Preis eines Gutes nicht beeinflussen).

Voraussetzungen:

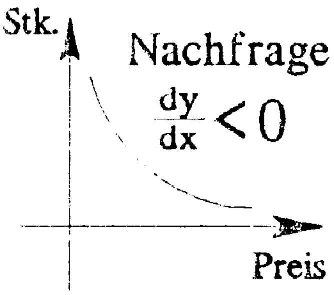
a) Anbieter und Käufer haben vollständigen Einblick in das Marktgeschehen (Markttransparenz).

b) Das Verhalten von Anbietern und Käufern ist rational, d.h.: für die Wahl den Artikel anzubieten oder zu erwerben, soll nur sein Preis maßgebend sein. (In der makroökonomischen Betrachtungsweise ist die angebotene und die abgesetzte Menge außer vom Preis auch noch von den allgemeinen wirtschaftlichen Verhältnissen abhängig. Dieser Zusammenhang soll hier nicht behandelt werden).

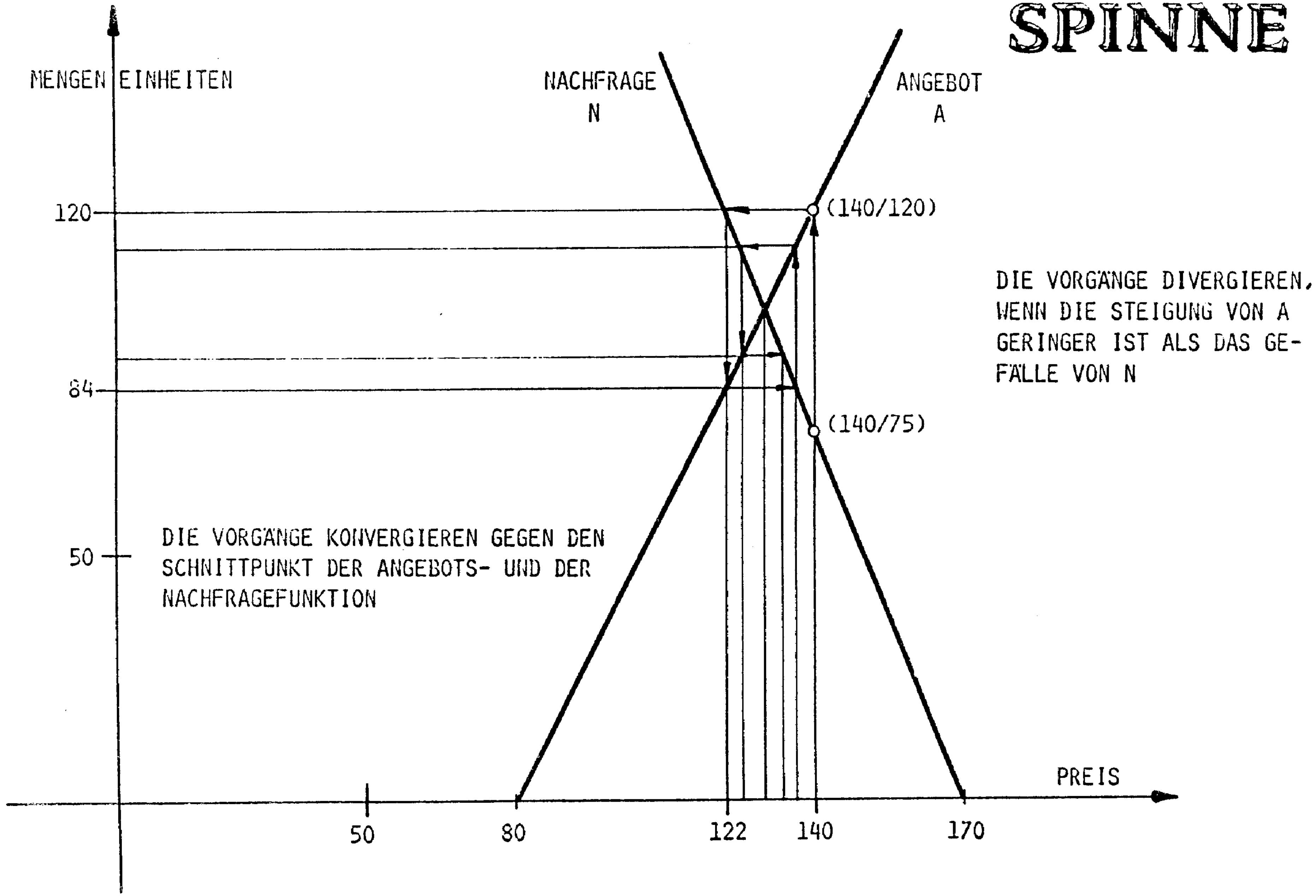
Die Nachfragefunktion:

y_N ... die nachgefragte Menge. Sie ist normalerweise umso geringer, je größer der Preis p ist. (Ausnahme: "Snobeffekt": Erst bei höherem Preis wird der Artikel für Käufer attraktiv, sodaß dadurch die Nachfrage steigt).

$y_N = f(p)$ .... Nachfragefunktion $\frac{dy}{dp} < 0$



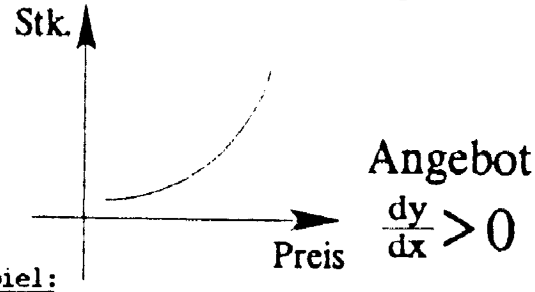
SPINNE


MENGEN EINHEITEN
NACHFRAGE N
ANGEBOT A
120
84
50
(140/120)
(140/75)
DIE VORGÄNGE DIVERGIEREN, WENN DIE STEIGUNG VON A GERINGER IST ALS DAS GEFÄLLE VON N
DIE VORGÄNGE KONVERGIEREN GEGEN DEN SCHNITTPUNKT DER ANGEBOTS- UND DER NACHFRAGEFUNKTION
PREIS
50
80
122
140
170

Die Angebotsfunktion:

y_A ... die angebotene Menge. Sie ist normalerweise umso größer, je größer der Preis ist. (Größerer Anreiz für den Produzenten).

$y_A = f(p)$ .... Angebotsfunktion $\frac{dy}{dp} > 0$



Demonstrationsbeispiel:
Vereinfachen Sie sich, geschätzter Leser, das Durcharbeiten mit gleichzeitiger Verwendung der Graphik "Spinne".

a) Angebotsfunktion
Aus Marktuntersuchungen folgt: bei einem Preis von p = S 140,-- pro Mengeneinheit (ME) besteht ein Angebot von 120 ME.

$$y_A(140) = 120$$

Bei einem Preis von $p \leq$ S 80,-- pro Mengeneinheit (ME) gibt es kein Angebot mehr.

$$y_A(80) = 0$$

b) Nachfragefunktion
Aus Marktuntersuchungen folgt: Bei einem Preis von $p \geq$ S 170,-- pro Mengeneinheit (ME) herrscht keine Nachfrage mehr; der Artikel ist zu teuer.

$$y_N(170) = 0$$

Bei einem Preis von p = S 140,-- pro Mengeneinheit (ME) besteht eine Nachfrage von 75 ME.

$$y_N(140) = 75$$

Das einfachste mathematische Modell für diese Marktverhältnisse ergibt sich in der Annahme linearer Funktionen für Angebot und Nachfrage.

Allgemeine Form: $y=kx+d$
k,d .... Konstante

Ansatz und Lösung des Modells:

a) Angebotsfunktion
Gegeben 2 Punkte $P_1(140/120)$, $P_2(80/0)$

$$120 = k\cdot 140+d \quad (1)$$
$$0 = k\cdot 80+d \quad (2)$$

$$k = 2$$
$$d = -160$$

$y_A = 2x-160$ wobei $x=p$ (Preis)

b) Nachfragefunktion

Gegeben 2 Punkte $P_1(170/0)$ $P_2(140/75)$

$$0 = k \cdot 170 + d \quad (1)$$
$$75 = k \cdot 140 + d \quad (2)$$
$$k = -2{,}5$$
$$d = 425$$

$y_N = -2{,}5x+425$

Das Einpendeln des Preises auf den Gleichgewichtspreis: Beim Spinnwebtheorem (so nennt man dieses Modell) wird angenommen, daß die Anpassung des Angebots auf die veränderte Nachfrage mit einer Verzögerung von einer Periode erfolgt. Das heißt: Der in die Angebotsfunktion einzusetzende Preis ist der Marktpreis der Vorperiode. Dieser ist dafür verantwortlich, wie groß in dieser Periode das Angebot ist.

1. Periode: Preis der Vorperiode: $P_0=140$ GE/ME (willkürlich gegeben). Bei diesem Preis wird angeboten: $y_{A1}=2.140-160=120$ ME. Um diese gesamte angebotene Menge auch absetzen zu können, muß der Preis sinken: $p_1=0{,}4 \cdot 120+170=122$ GE/ME.
   Der Gesamtumsatz (wertmäßig): $E_1=p_1 \cdot y_1=122 \cdot 120=$ $=14640$ GE.

2. Periode: Preis der Vorperiode: $p_1=122$ GE/ME. Bei diesem Preis wird angeboten: $y_{A2}=2 \cdot 122-160=84$ ME. Durch das geringere Angebot wird der Artikel zur Mangelware, der Preis steigt: $p_2=-0{,}4 \cdot 84+170=$ $=136{,}4$ GE/ME.
   Der Gesamtumsatz: ... $E_2=p_2 \cdot y_2=136{,}4 \cdot 84=11457{,}6$ GE.

3. Periode: Preis der Vorperiode: $p_2=136{,}4$ GE/ME. Bei diesem Preis wird angeboten: $y_{A3}=2 \cdot 136{,}4-160=112{,}8$ ME. Um diese gesamte angebotene Menge auch absetzen zu können, muß der Preis sinken: $p_3=-0{,}4 \cdot 112{,}8+170=$ $=124{,}88$ GE/ME.
   Der Gesamtumsatz: ... $E_3=p_3 \cdot y_3=124{,}88 \cdot 112{,}8=14086{,}464$ GE.

.
. usw.
.

Die Konvergenzbedingung

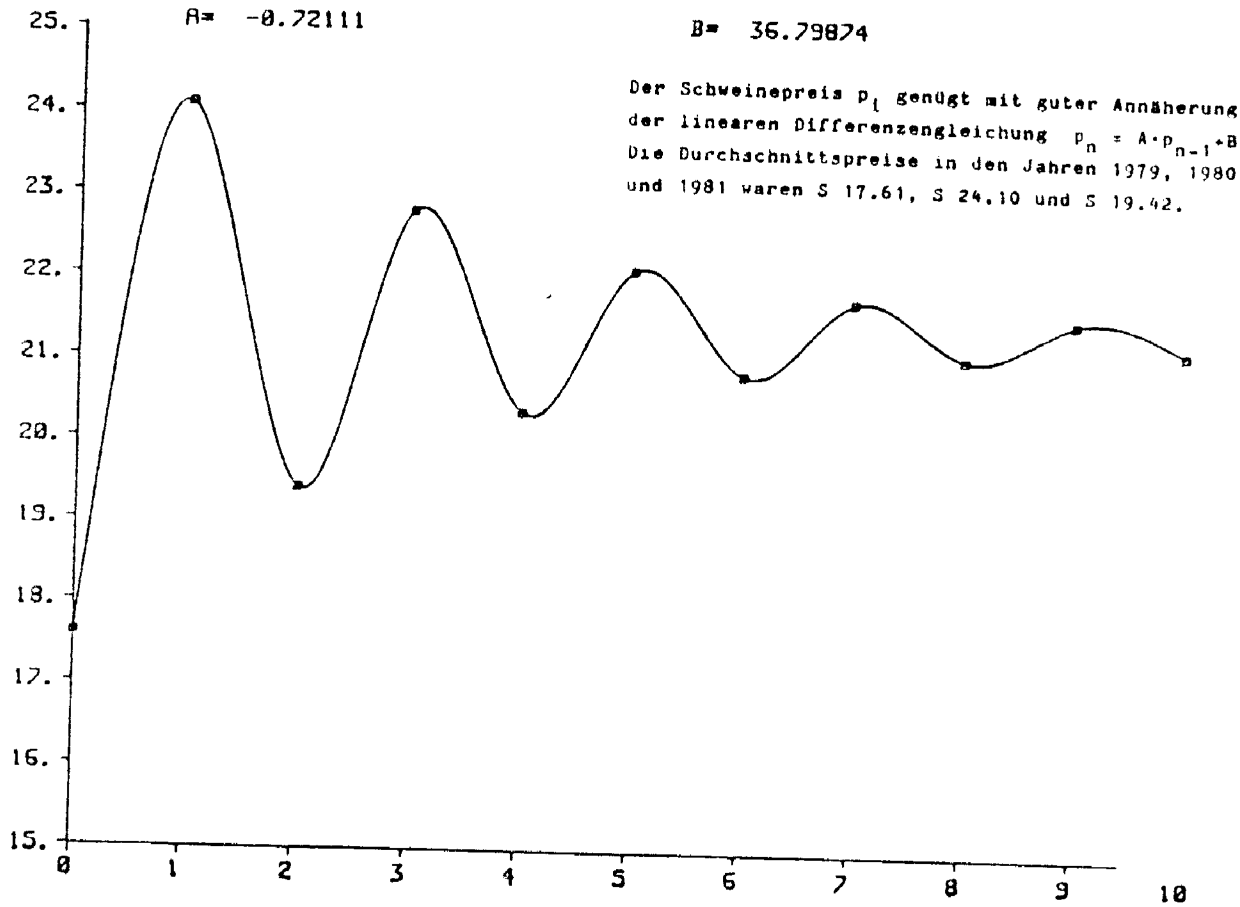
$$\left|\left(\frac{dy}{dx}\right)_N\right| > \left(\frac{dy}{dx}\right)_A \quad \text{bzw.} \quad |k_N| > k_A$$

Das Marktgleichgewicht ergibt sich als Schnittpunkt der Angebots- und der Nachfragefunktion.

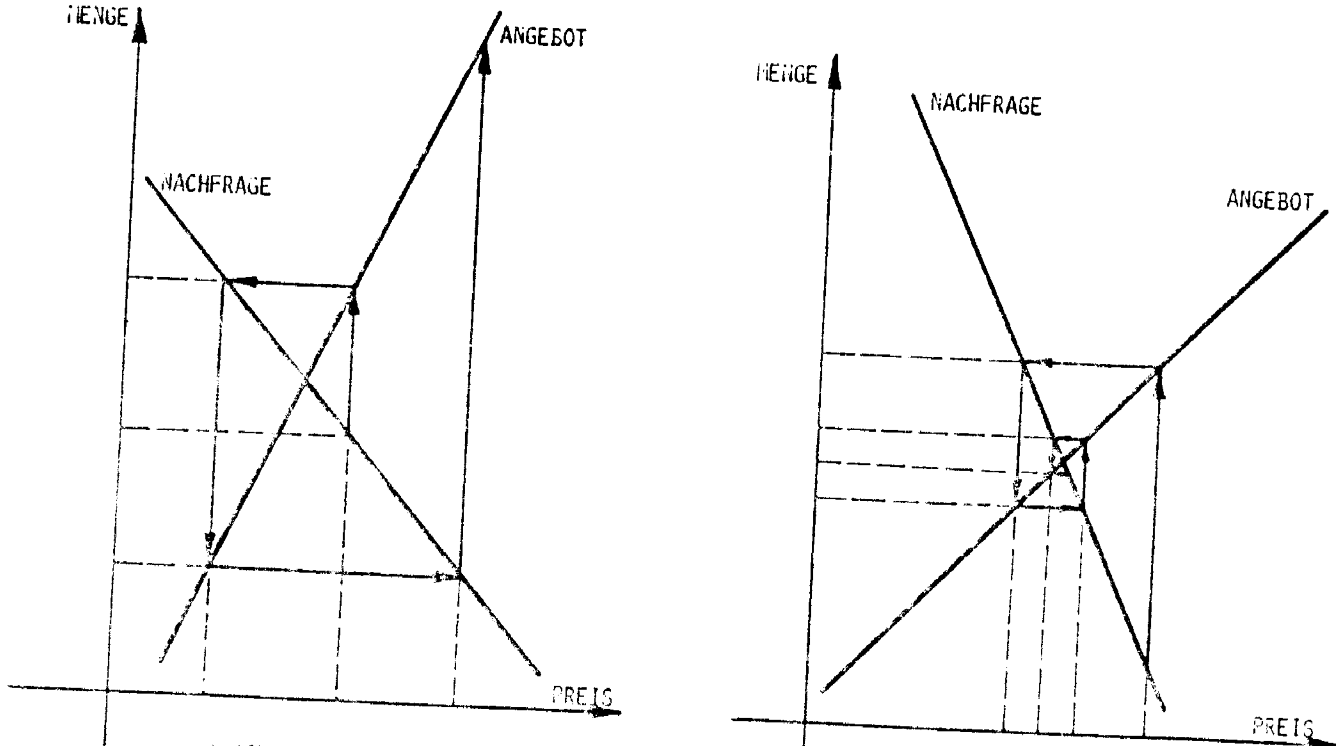
Die Folge der Periodenpreise

A. Beim konkreten Beispiel
   $y_A = 2p_{i-1}-160$ ... (Preis der Vorperiode)
   $y_N = -2{,}5p_i+425$

   Der Übergang von p_{i-1} auf p_i erfolgt bei gleichbleibender Menge, also $y_A = y_N$:
   $$2p_{i-1}-160 = -2{,}5p_i+425$$
   $$2{,}5p_i = -2p_{i-1}+585$$



SPINNWEBTHEOREM



A) DIVERGENT
$|K_N| < K_A$

B) KONVERGENT
$|K_N| > K_A$

Algorithmus (Bildungsgesetz der Periodenpreise) $\boxed{p_i = -0{,}8p_{i-1}+234}$

B. beim abstrahierten Beispiel

$y_A = k_A \cdot p_{i-1}+d_A$ .. (Preis der Vorperiode)

$y_N = k_N \cdot p_i+d_N$

$y_A=y_N$

Der Algorithmus $\boxed{p_i = \frac{k_A}{k_N}\cdot p_{i-1} + \frac{d_A-d_N}{k_N}}$

Eine lineare Differenzengleichung

Den Abschluß des 1.Teils soll die Anwendungsaufgabe auf konkrete Schweinepreise des vorigen Jahrzehnts bilden:
Die Preise in drei aufeinanderfolgenden Perioden waren ÖS 21,58; ÖS 21,11 und ÖS 21,76. Berechnen Sie die Preise der nächsten drei Perioden. (Lösung: ÖS 20,86 ÖS 22,11 ÖS 20,38)

Rationsberechnung für Milchkühe

Futtermittellabor Rosenau der
NÖ.Landes-Landwirtschaftskammer
3252 Petzenkirchen, Tel.:07416/2494

Probe Nr.: 00 00 0000
Rinderfutter
Datum: 09. April 1992

UNTERSUCHUNGSERGEBNIS

Name: Alfred Vogel

Anschrift: Weinzierl-Beim Schloß 7, 3250 Wieselburg

Bezeichnung der Probe: Heu 1. Schnitt

ANALYSENWERTE

NÄHRSTOFFE: (g/kg)		FM	TM
Trockenmasse	TM	934	1000
Rohprotein	RP	73	78
Rohfett	RFE	22	24
Rohfaser	RFA	324	347
N-freie Stoffe	NFE	465	498
Rohasche	RA	50	54
Stärkeeinheiten	STE	346	370
Nettoenergielak.in MJ		4.56	4.88

Bezeichnung der Probe: Grassilage 1. Schnitt

ANALYSENWERTE

NÄHRSTOFFE: (g/kg)		FM	TM
Trockenmasse	TM	286	1000
Rohprotein	RP	35	123
Rohfett	RFE	7	25
Rohfaser	RFA	85	296
N-freie Stoffe	NFE	136	475
Rohasche	RA	23	81
Stärkeeinheiten	STE	167	583
Nettoenergielak.in MJ		1.73	6.04

Energieberechnung für Rinderfutter
(d.h.: NEL-Berechnung)

Berechnung der Nettoenergie-Laktation (NEL in MJ/kg Futtermittel)

NEL = UE * 0,60 * (1 + 0,004*(q - 57))

UE = umsetzbare Energie
BE = Bruttoenergie

$$q = \frac{UE}{BE} * 100$$

UE[MJ] = 0,0152 * v.RP[Gramm] + 0,0342 * v.RFE[Gramm] + 0,0128 * v.RFA[Gramm] + 0,0159 * v.NFE[Gramm] - 0,0007 Zucker[Gramm]

BE[MJ] = 0,0242 * RP[Gramm] + 0,0366 * RFE[Gramm] + 0,0209 * RFA[Gramm] + 0,0170 * NFE[Gramm] - 0,0007 Zucker[Gramm]

v.RP = verdauliches Rohprotein = RP
v.RFE = verdauliches Rohfett = RFE
v.RFA = verdauliche Rohfaser = RFA
v.NFE = verdauliche stickstoffreie Extraktstoffe = NFE

Der in den Formeln angegebene Zuckerabzug ist nur bei Zuckergehalten von über 8 % i.d.TM vorzunehmen.

Beispiel: Soja

$$q = \frac{11,48}{17,53} * 100$$

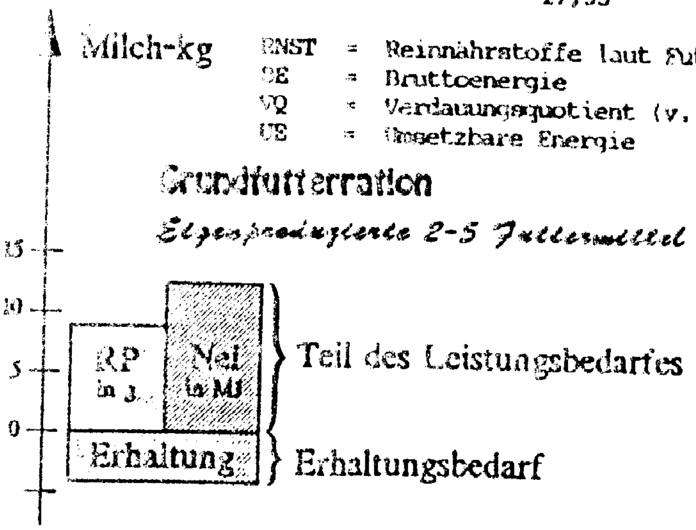
NEL[MJ] = 11,48 * 0,60 * (1 + 0,004*(65,49 - 57)) = 7,12

	RNST g/kg FM	BE Faktor	BE MJ/kg FM	VQ %	V.NST g/kg FM	UE Faktor	UE MJ/kg FM
RP	436	0,0242	10,55	92	401,1	0,0152	6,10
RFE	10	0,0366	0,37	63	6,3	0,0342	0,22
RFA	68	0,0209	1,42	75	51,0	0,0128	0,65
NFE	305	0,0170	5,19	93	283,7	0,0159	4,51
Summe			17,53				11,48

RNST = Reinnährstoffe laut Futteranalyse
BE = Bruttoenergie
VQ = Verdauungsquotient (v. DLG Futterwerttabelle)
UE = Umsetzbare Energie

Grundfutterration

Eigenproduzierte 2-5 Futtermittel



Kuh-Freß-Alltag

Rauhfutter (Heu, Stroh)
Gärfutter (zB Gras-, Maissilagen)
Knollen und Wurzeln (Futterrüben, Kartoffel)
Getreide und Hülsenfrüchte (zB Gerste, Erbse)
Rückstände der Ölgewinnung (Soja-, Rapsschrot)
Futtermittel tierischer Herkunft (Vollmilch, Molke)
Industrielle Nebenerzeugnisse (zB Bierhefe)

Beispiel für die Berechnung der Grundfutteraufnahme bei Milchrindern

$$\boxed{GF = 0{,}36 + 0{,}0038 \cdot LG + 2{,}0 \cdot NEL - 0{,}031 \cdot KF^2}$$

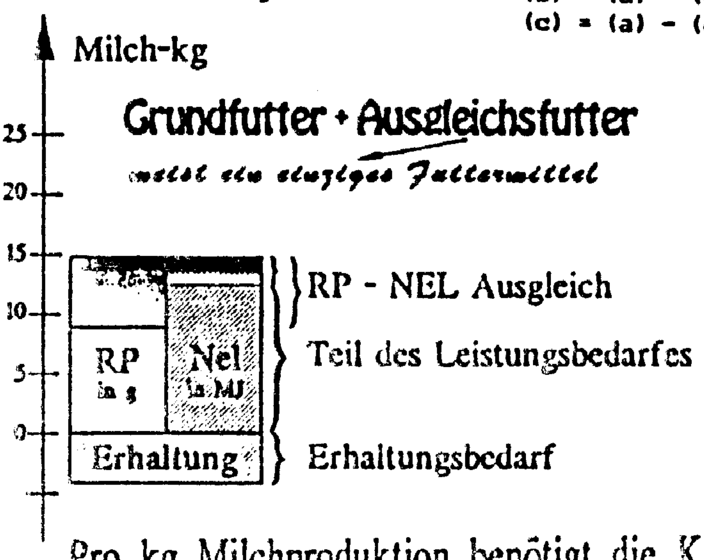
GF = Grundfutteraufnahme in kg Trockenmasse je Tier und Tag
LG = Lebendgewicht des Rindes in kg
NEL = Energiekonzentration des Futters in Megajoule je kg Trockenmasse
KF = Kraftfuttermenge in kg Trockenmasse

Die Verdaulichkeit (Energiekonzentration) ist der wichtigste Einflußfaktor auf die Grundfutteraufnahme. Mit zunehmender Energiekonzentration steigt die Grundfutteraufnahme an. Der Kraftfuttereinsatz führt zu einer Grundfutterverdrängung und mindert daher die Grundfutteraufnahme (mit zunehmender KF-Menge progressive Verdrängung).

Praktisches Beispiel: Rind mit 650 kg Lebendgewicht
Grundfutterenergie 5 MJ-NEL je kg Trockenmasse

	Kraftfutter TM je Tier und Tag		
	0 kg	4 kg	8 kg
Grundfutteraufnahme (Trockenmasse je Tier und Tag)	12,83 kg (a)	12,334 kg (b)	10,846 kg (c)
Grundfutterverdrängung (kg Trockenmasse)	0,00 kg	0,496 kg (d)	1,984 kg (e)

Dabei gilt: (b) = (a) - (d)
(c) = (a) - (e)



Komponenten der Milchleistung

TS = Trockensubstanz
RFA = Rohfaseranteil
RP = Roheiweiß
NEL = Nettoenergie-Laktation

RP : NEL = 26,5 : 1
RFAnteil max 25%
Obacht auf Futtermittelmaximalmengen.
Trockensubstanzgrenzen und Kraftfutter

Pro kg Milchproduktion benötigt die Kuh:
84 Gramm Roheiweiß
3,17 Megajoule NEL

Eine obere Grenze stellt die Veranlagung dar :

Mehr als 50 kg Tages-Milch-Leistung

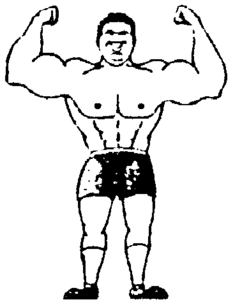
Grundfutter + Ausgleichsfutter

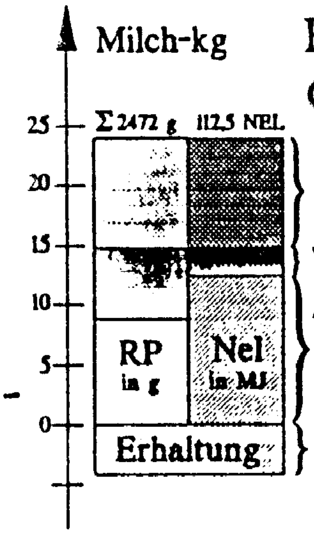
Rationsberechnung für Milchkühe Durchschnittlagewicht 650 kg
16-Apr-92

		In 1kg des Futters				Gesamtration			
Menge in kg	Futterart	TS g	RFA g	RP g	NEL MJ	TS g	RFA g	RP g	NEL MJ
20	Grassilage	286	85	35	1,73	5720	1700	700	34,60
4	Wiesenheu	934	324	73	4,56	3736	1296	292	18,24
20	Gehaltsrube	146	10	12	1,23	2920	200	240	24,60
						12376	3196	1232	77,44
	Abzug für Erhaltung							490	37,7
	bleiben für Leistung					RFA%	25,8%	742	39,74
	Leistungsbedarf pro kg Milch (4%Fett)							84	3,17
	Mogliche kg Milch							8,8	12,5

Ausgleichsfutter

Menge in kg	Futterart	TS g	RFA g	RP g	NEL MJ	TS g	RFA g	RP g	NEL MJ
1,05	Sojaextrakt	890	15	488	7,27	935	17	512	7,63
						13311	3213	1254	47
	Mogliche kg Milch					RFA%	24,1%	14,9	14,9





RP : NEL = 26,5 : 1

Grundfutter + Ausgleichsfutter + Leistungskraftfutter

Standard-Futtermischung mit zum Teil unterschiedlichen Anforderungen.

zB - Eiweißanforderung in Gramm oder Prozenten
- Konstantes Eiweiß-Energieverhältnis
- Minimale und maximale Trockensubstanz
- Maximaler Rohfaseranteil

Die Veranlagung der Kuh macht etwa 24kg Milch Tagesleistung möglich

Leistungskraftfutter

Optimalitätskriterium = Preis

oder für die Gesamtration
- max. 30% Maisanteil
- max. 20% Rübenschnitzelanteil
- max. 15% Roggenanteil
- max. 20% Ölkuchen

Ausgleichsfutter inklusive Kraftfutter

Menge in kg	Futterart	TS g	RFA g	RP g	NEL MJ	TS g	RFA g	RP g	NEL MJ
2,9	Gerstenschrot	868	46	108	7,33	2517	133	313	21,26
1,9	Sojaextrakt	890	35	488	7,27	1691	67	927	13,81
						16584	3396	1982	74,81
	Mogliche kg Milch					RFA%	20,5%	23,6	23,6

Zusammenfassung der mathematischen Modelle

Matrizenrechnung

bei der Futterkomponentenrechnung

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

Nährstoffkomponentenmatrix · Mengenvektor

Prozentrechnung

zur Ermittlung des Rohfaseranteils

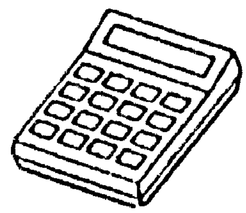
$$\frac{\sum \text{Rohfaser}}{\sum \text{Trockensubstanz}} * 100$$

Lineare Gleichung

zur Ermittlung der Ausgleichsfuttermenge

$$\frac{\sum RP - 490 + y \cdot b_3}{\sum NEL - 37{,}7 + y \cdot b_4} = \frac{26{,}5}{1}$$

Erhaltungsbedarf · Gesamt - RP / NEL des Ausgleichsfutters



Gleichungen und Ungleichungen

bei der Mischungsrechnung zur Ermittlung des RFA oder der Trockensubstanz

Mindestens 18% RFA
Höchstens 28% RFA
} in der Gesamtration

u kg TS Grundfutter+Ausgleichsfutter = P% RFA
v kg TS Leistungkraftsfutter (LKF) = Q% RFA

Untere Grenze	Obere Grenze
$u \cdot \frac{P}{100} + v \cdot \frac{Q}{100} = (u+v) \cdot \frac{28}{100}$	$u \cdot \frac{P}{100} + v \cdot \frac{Q}{100} = (u+v) \cdot \frac{18}{100}$

$$\frac{28u - Pu}{Q - 28} \leq v \leq \frac{18u - Pu}{Q - 18}$$

$$\frac{28u + 28v - Pu}{v} \leq Q \leq \frac{18u + 18v - Pu}{v}$$

Das LKF hat zu wenig TS und RFA

Mehr LKF bringt weniger RFA in der Gesamtration

Lineare Optimierung *zur Ermittlung der kostengünstigsten Futtermischung*

Nebenbedingungen

Eiweißforderung = 756 g ← 9 kg Milch • 84 g RP
Minimale TS = 3 kg
Maximale TS = 7 kg
Maximale RFA = 25 %
Eiweiß-Energieverhältnis
26,5 : 1

Futterauswahl

Annahme:

	TS	RFA	RP	NEL	öS
Sojaextrakt	890	35	488	7,27	3,75
Rapsextraktionsschrot	890	127	330	6,27	2,39
Hafer	886	119	110	6,20	4,18
Gerstenschrot	868	46	108	7,33	4,18
Roggenkleie	881	72	96	5,72	2,35

Entscheidungsvariablen

Sojaextrakt	x_1	kg
Rapsextraktionsschrot	x_2	kg
Hafer	x_3	kg
Gerstenschrot	x_4	kg
Roggenkleie	x_5	kg

Hauptbedingung

$$3{,}75x_1 + 2{,}39x_2 + 4{,}18x_3 + 4{,}18x_4 + 2{,}35x_5 = \text{Minimum}$$

Modellansatz

$$488x_1 + 330x_2 + 110x_3 + 108x_4 + 96x_5 \geq 756 \quad \ldots\ \text{I}$$

$$890x_1 + 890x_2 + 886x_3 + 868x_4 + 881x_5 \geq 3000 \quad \ldots\ \text{II}$$

$$890x_1 + 890x_2 + 886x_3 + 868x_4 + 881x_5 \leq 7000 \quad \ldots\ \text{III}$$

$$\frac{35x_1 + 127x_2 + 119x_3 + 46x_4 + 72x_5}{890x_1 + 890x_2 + 886x_3 + 868x_4 + 881x_5} \leq \frac{25}{100} \quad \ldots\ \text{IV}$$

$$\frac{488x_1 + 330x_2 + 110x_3 + 108x_4 + 96x_5}{7{,}27x_1 + 6{,}27x_2 + 6{,}2x_3 + 7{,}33x_4 + 5{,}72x_5} = \frac{26{,}5}{1} \quad \ldots\ \text{V}$$

Eine zu minimierende Zielfunktion wird durch Multiplikation mit (-1) in eine zu maximierende Zielfunktion umgewandelt.

z.B.: $K = A\cdot x_1 + B\cdot x_2 + C\cdot x_3 + D\cdot x_4 + E\cdot x_5 \longrightarrow$ Minimum

$-K = z = -A\cdot x_1 - B\cdot x_2 - C\cdot x_3 - D\cdot x_4 - E\cdot x_5 \longrightarrow$ Maximum

Nebenbedingung in Form von Gleichungen

In jeder Nebenbedingungsgleichung wird eine künstliche Variable (Hilfsvariable h_i) ergänzt.
Diese dient als Basisvariable für die 1. Matrix des Simplexverfahrens. Im vorliegenden Fall ist dies die V.Beziehung.

V ... $P\cdot x_1 + Q\cdot x_2 + R\cdot x_3 + S\cdot x_4 + T\cdot x_5 = U \longrightarrow P\cdot x_1 + Q\cdot x_2 + R\cdot x_3 + S\cdot x_4 + T\cdot x_5 + h_5 = U$

Nebenbedingungen in Form von Größer-Gleich-Beziehungen

Es wird eine Schlupfvariable (y_i) subtrahiert.
z.B.:

I ... $P\cdot x_1+Q\cdot x_2+R\cdot x_3+S\cdot x_4+T\cdot x_5 \geq V \longrightarrow P\cdot x_1+Q\cdot x_2+R\cdot x_3+S\cdot x_4+T\cdot x_5-y_1+h_1 = V$

II ... $F\cdot x_1+G\cdot x_2+H\cdot x_3+I\cdot x_4+J\cdot x_5 \geq W \longrightarrow F\cdot x_1+G\cdot x_2+H\cdot x_3+I\cdot x_4+J\cdot x_5-y_2+h_2 = W$

Um zu erzwingen, daß in der Endlösung die Variablen h_i alle gleich Null sind, bildet man eine 2. Zielfunktion (Hilfszielfunktion z'), die im Simplexverfahren vorranging vor z beachtet werden muß:

$z' = -\Sigma h_i \longrightarrow$ Max .... z.B.: $z' = -(h_1 + h_2 + h_3) \longrightarrow$ Max

Solange nicht alle Hilfsvariablen zu Nicht-Basis-Variablen (NBV) geworden sind, sind die den einzelnen Matrizen zu entnehmenden Basislösungen nicht zulässig.

Nachdem alle Hilfsvariablen NBV=0 geworden sind, ist auch z' = 0 und es gibt nur mehr die Zielfunktion z. Das Simplexverfahren, läuft wie im beiliegenden Programmablaufplan ersichtlich, weiter.

Anmerkung: Der allgemein behandelte Minimierungsalgorithmus (UPRO - MINI 1 - - MINI 2 - MINI 3 - MINI 4 ist als Standardaufgabe der Minimierung behandelt; nur mit Größer-gleich-Beziehungen. Die konkrete Linearoptimierung beim Futtermischen ist im Gegensatz dazu mit den zuvor gezeigten Sonderfällen (den "h_i-Zeilen") durchgeführt.

Ausgangsmatrix für den Simplex

488,00	330,00	110,00	108,00	96,00	-1,00	0,00	0,00	0,00	756,00
890,00	890,00	886,00	868,00	881,00	0,00	-1,00	0,00	0,00	3000,00
890,00	890,00	886,00	868,00	881,00	0,00	0,00	1,00	0,00	7000,00
-18750,00	-9550,00	-10250,00	-17100,00	-14825,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00
295,35	163,85	-54,30	-86,24	-55,58	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
3,75	2,39	4,18	4,18	2,35	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Optimale Lösung

Rapsextraktionsschrot	1,23 kg
Roggenkleie	3,64 kg
Kosten der Mischung	öS 11,49

Anschrift des Verfassers:

Alfred VOGEL , Höhere landwirtschaftliche Bundes-lehranstalt "Francisco-Josephinum"
Schloß Weinzierl, 3250 Wieselburg

Literatur:

O. Kellner - M. Becker: Grundzüge der Fütterungslehre
Paul Parey-Verlag

H. Rohrhofer: Neue Futterwertberechnungen für Rinder und Schweine, Die berufsbildende Schule 5-1986.

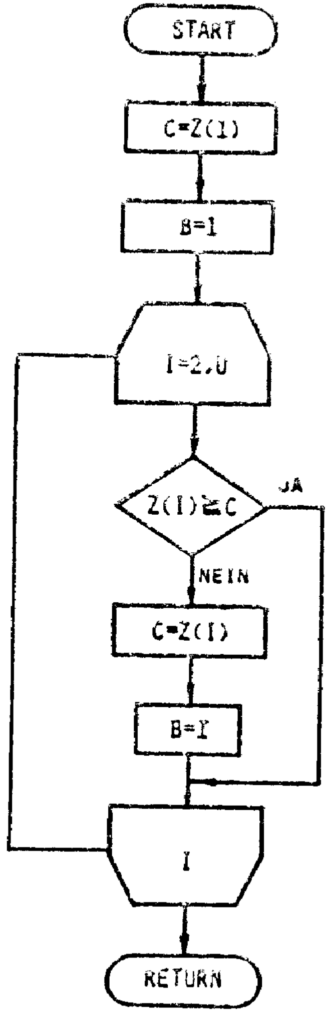
E. Nemec: Die lineare Planungsrechnung, PIB Heft 10

E. Granz: Tierproduktion, Paul Parey-Verlag

A. Vogel: Differenzengleichungen im Mathematikunterricht
Didaktik der Mathematik 3-1984, BSV-Verlag

UPRO

AUS U ZAHLEN DIE KLEINSTE C BERECHNEN



Problemstellung: Minimierung (Standardaufgabe)

$$b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 \cdots\cdots + b_{1s}x_s \geq d_1$$
$$b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3 \cdots\cdots + b_{2s}x_s \geq d_2$$
$$\vdots$$
$$b_{t1}x_1 + b_{t2}x_2 + b_{t3}x_3 \cdots\cdots + b_{ts}x_s \geq d_t$$
$$\overline{c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \cdots\cdots + c_s = Z \rightarrow \text{Minimum}}$$

Eingabematrix:

$$\begin{array}{cccccc}
b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots\cdots & b_{1,N-1} & b_{1,N} \\
b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots\cdots & b_{2,N-1} & b_{2,N} \\
\vdots & & & & & \\
b_{M-1,1} & b_{M-1,2} & b_{M-1,3} & \cdots\cdots & b_{M-1,N-1} & b_{M-1,N} \\
\hline
b_{M,1} & b_{M,2} & b_{M,3} & \cdots\cdots & b_{M,N-1} & b_{M,N}
\end{array}$$

M Zeilen
N Spalten

M wird um 1 erhöht
$M = M+1$

Normalform:

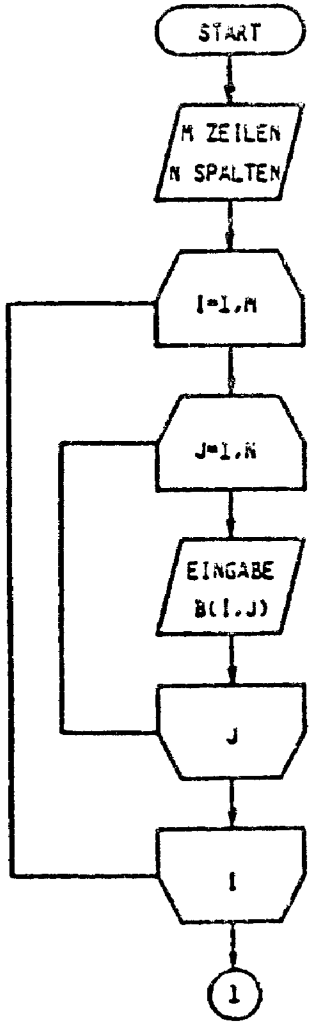
$$\boxed{\begin{array}{l}
b_{M,1} = -\sum_{i=1}^{M-1} b_{i,1} \\
b_{M,2} = -\sum_{i=2}^{M-1} b_{i,2} \\
\vdots \\
b_{M,N} = -\sum_{i=1}^{M-1} b_{i,N}
\end{array}}$$

Der Computer baut neue 2. Zielzeile

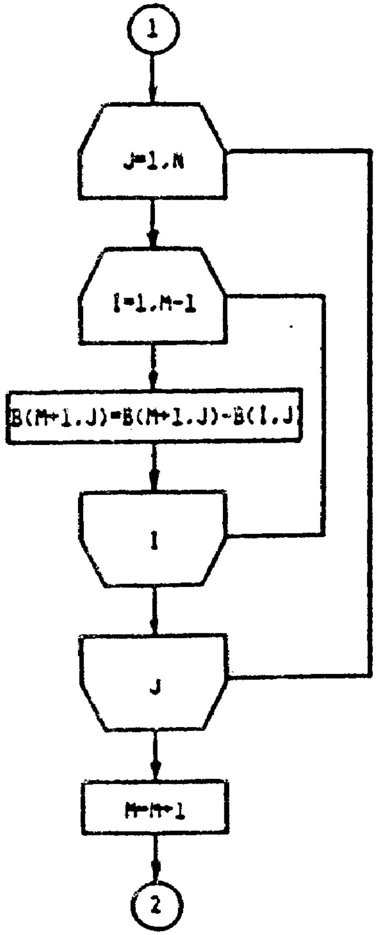
$$\begin{array}{cccccc}
b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots\cdots & b_{1,N-1} & b_{1,N} \\
b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots\cdots & b_{2,N-1} & b_{2,N} \\
\vdots & & & & & \\
b_{M-2,1} & b_{M-2,2} & b_{M-2,3} & \cdots & b_{M-2,N-1} & b_{M-2,N} \\
\hline
b_{M-1,1} & b_{M-1,2} & b_{M-1,3} & \cdots & b_{M-1,N-1} & b_{M-1,N} \\
b_{M,1} & b_{M,2} & b_{M,3} & \cdots & b_{M,N-1} & b_{M,N}
\end{array}$$

Mini 1

MATRIXEINGABE

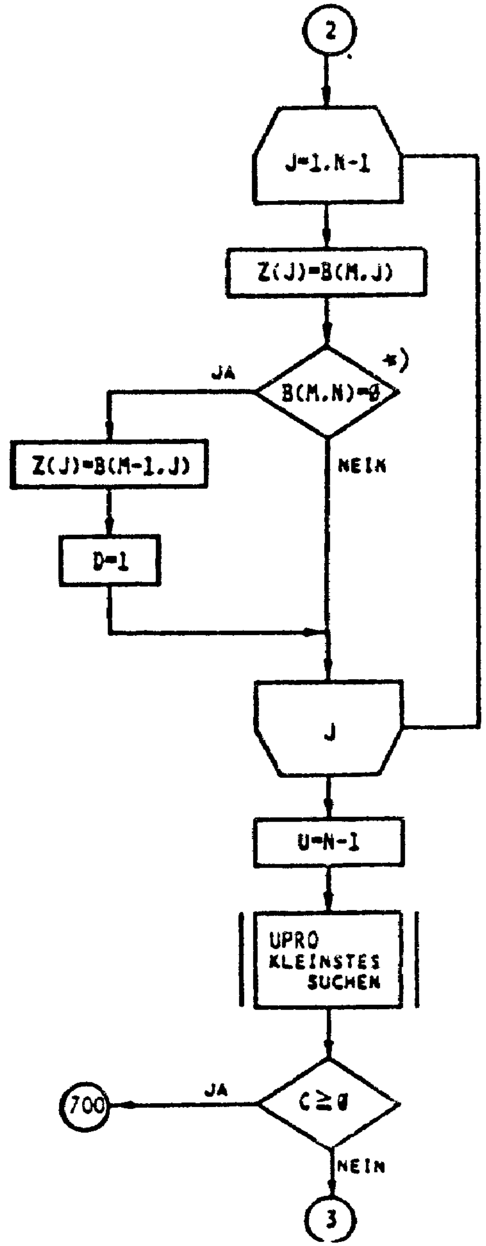


2. ZIELZEILE

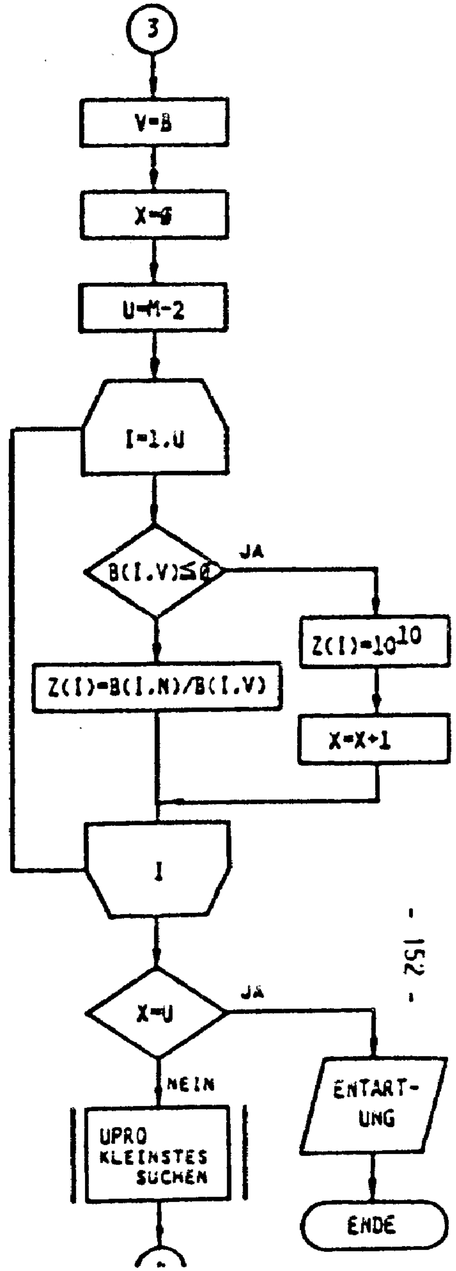


Mini 2

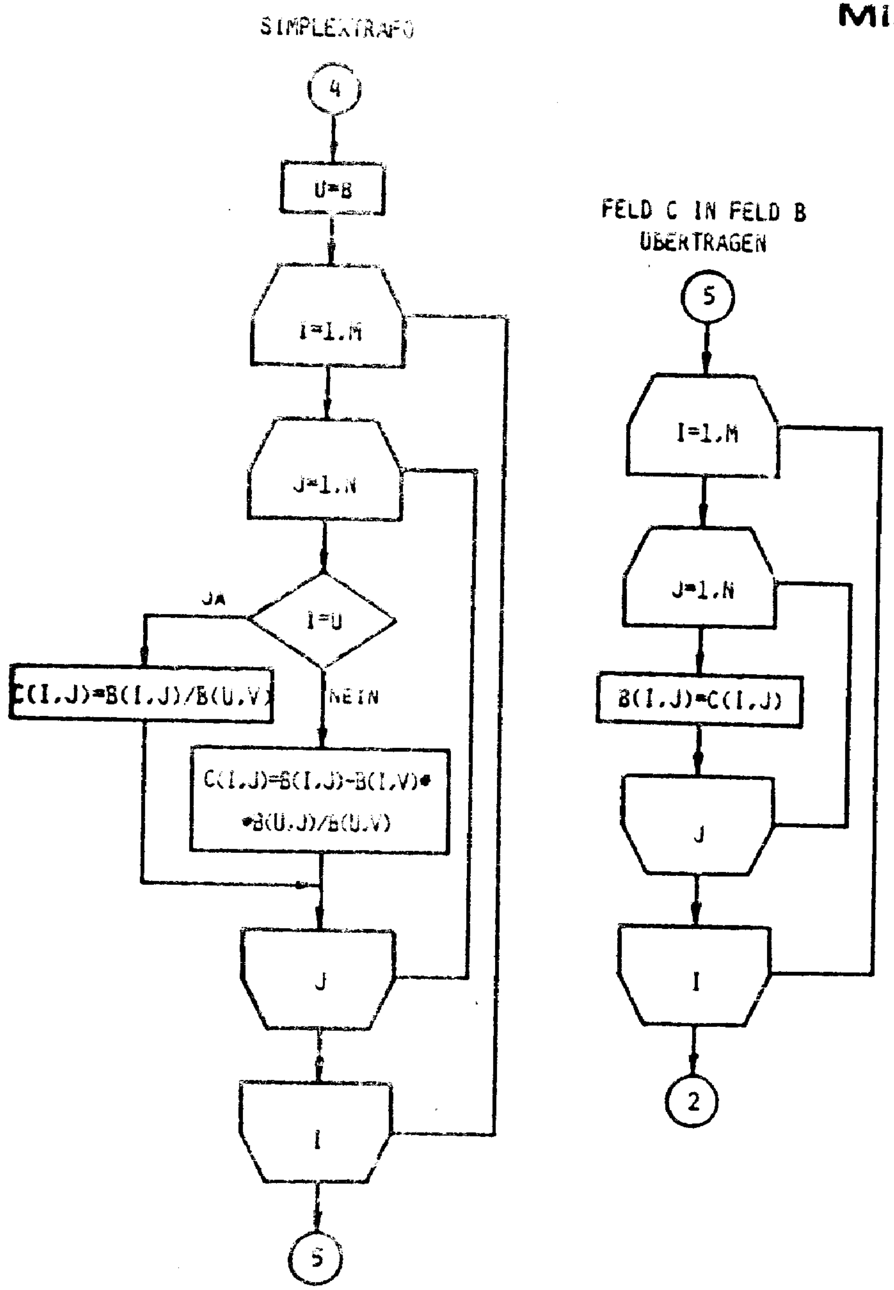
KLEINSTES ELEMENT DER
JEWEILIGEN ZIELZEILE SUCHEN



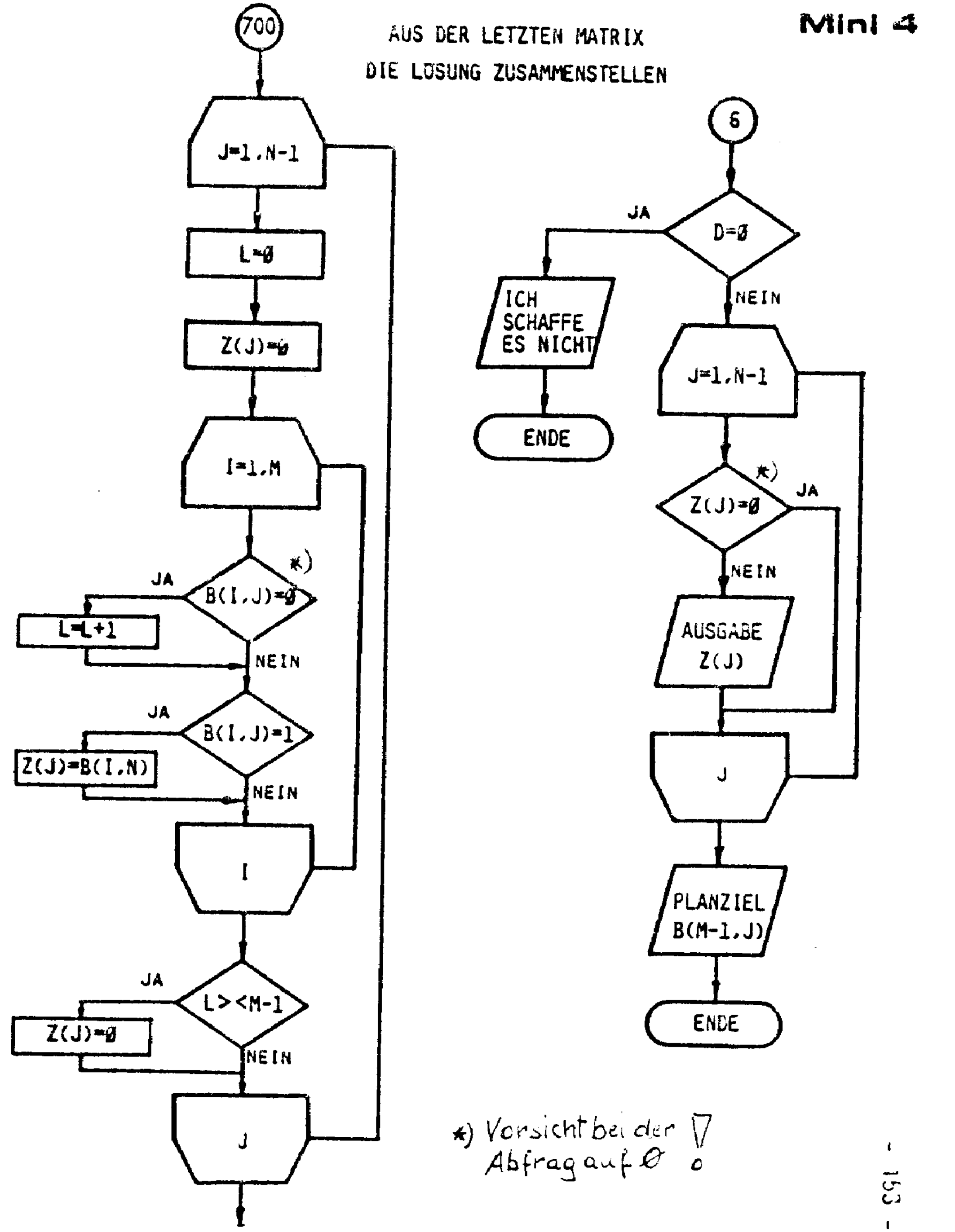
KLEINSTEN QUOTIENTEN



Mini 3



Mini 4



*) Vorsicht bei der Abfrag auf Ø

Linearoptimierung beim Futtermischen

Eiweißforderung in Gramm 756 — $488x_1 + 330x_2 + 110x_3 + 108x_4 + 96x_5 \geq 756$

Minimale TS in kg 3 — $890x_1 + 890x_2 + 886x_3 + 868x_4 + 881x_5 \geq 3000$

Maximale TS in kg 7 — $890x_1 + 890x_2 + 886x_3 + 868x_4 + 881x_5 \leq 7000$

Maximale RFA in % 25 — $\dfrac{35x_1 + 127x_2 + 119x_3 + 46x_4 + 72x_5}{890x_1 + 890x_2 + 886x_3 + 868x_4 + 881x_5} \leq \dfrac{25}{100}$

$\dfrac{RP}{NEL} \quad \dfrac{488x_1 + 330x_2 + 110x_3 + 108x_4 + 96x_5}{7.27x_1 + 6.27x_2 + 6.2x_3 + 7.33x_4 + 5.72x_5} = \dfrac{26.5}{1}$

	TS	RFA	RP	NEL	Preis	
Sojaextrakt 50er	890	35	488	7.27	3.75	x_1
Rapsextrakt.onsschrot	890	127	330	6.27	2.39	x_2
Hafer	886	119	110	6.2	4.18	x_3
Gerstenschrot	868	46	108	7.33	4.18	x_4
Roggenkleie	881	72	96	5.72	2.35	x_5

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	y_3	y_4	b
h_1	488.00	330.00	110.00	108.00	96.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	756.00
h_2	890.00	890.00	886.00	868.00	881.00	0.00	-1.00	0.00	0.00	3000.00
	890.00	890.00	886.00	868.00	881.00	0.00	0.00	1.00	0.00	7000.00
	-18750.00	-9550.00	-10250.00	-17100.00	-14025.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00
h_3	$\boxed{295.15}$	163.85	-54.30	-86.24	-55.58	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
z	3.75	2.39	4.18	4.18	2.35	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
z'	-1673.34	-1381.84	-941.70	-889.75	-921.42	1.00	1.00	0.00	0.00	-3756.00
	0.00	59.26	199.72	250.56	167.84	-1.00	0.00	0.00	0.00	756.00
	0.00	396.27	1049.63	$\boxed{1127.89}$	1048.49	0.00	-1.00	0.00	0.00	3000.00
	0.00	396.27	1049.63	1127.89	1048.49	0.00	0.00	1.00	0.00	7000.00
	0.00	851.71	-13697.24	-22575.27	-18353.58	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00
	1.00	0.55	-0.18	-0.29	-0.19	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.31	4.87	5.28	3.06	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	-455.54	-1249.35	-1378.40	-1236.32	1.00	1.00	0.00	0.00	-3756.00
	0.00	-26.73	-33.40	0.00	-45.03	-1.00	$\boxed{0.22}$	0.00	0.00	89.71
	0.00	0.35	0.93	1.00	0.93	0.00	0.00	0.00	0.00	2.66
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	1.00	0.00	4000.00
	0.00	8783.14	7311.55	0.00	2632.41	0.00	-20.02	0.00	1.00	60046.32
	1.00	0.66	0.09	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.78
	0.00	-1.54	-0.04	0.00	-1.85	0.00	0.00	0.00	0.00	-14.03
	0.00	28.73	33.40	0.00	45.03	1.00	-0.22	0.00	0.00	-89.71
	0.00	-129.37	-150.39	0.00	-202.76	-4.50	1.00	0.00	0.00	403.90
	0.00	0.24	0.80	1.00	0.75	0.00	0.00	0.00	0.00	3.02
	0.00	129.37	150.39	0.00	202.76	4.50	0.00	1.00	0.00	3596.10
	0.00	6193.84	4301.49	0.00	-1425.85	-90.12	0.00	0.00	1.00	68130.53
	1.00	$\boxed{0.62}$	0.05	0.00	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00	0.88
	0.00	-0.94	0.66	0.00	-0.90	0.02	0.00	0.00	0.00	-15.92
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	207.36	0.00	-140.23	0.00	-196.37	-4.74	1.00	0.00	0.00	586.64
	-0.34	0.00	0.76	1.00	$\boxed{0.74}$	0.00	0.00	0.00	0.00	2.68
	-207.36	0.00	140.23	0.00	196.37	4.74	0.00	1.00	0.00	3413.36
	-9928.27	0.00	3815.37	0.00	-1731.39	-78.55	0.00	0.00	1.00	59380.96
	1.60	1.00	0.00	0.00	0.05	0.00	0.00	0.00	0.00	1.41
	1.50	0.00	0.74	0.00	-0.85	0.02	0.00	0.00	0.00	-14.59
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	106.45	0.00	66.93	266.03	0.00	-5.69	1.00	0.00	0.00	1300.58
	-0.51	0.00	1.05	1.35	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	3.64
	-106.45	0.00	-66.93	-266.03	0.00	5.69	0.00	1.00	0.00	2699.42
	-10017.96	0.00	5641.86	2345.56	0.00	-86.87	0.00	0.00	1.00	65675.60
	1.63	1.00	0.03	-0.07	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.23
	1.07	0.00	1.64	1.16	0.00	0.02	0.00	0.00	0.00	-11.49
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00